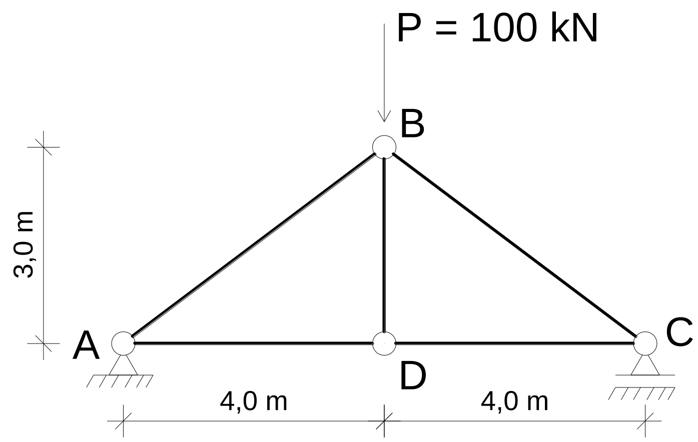
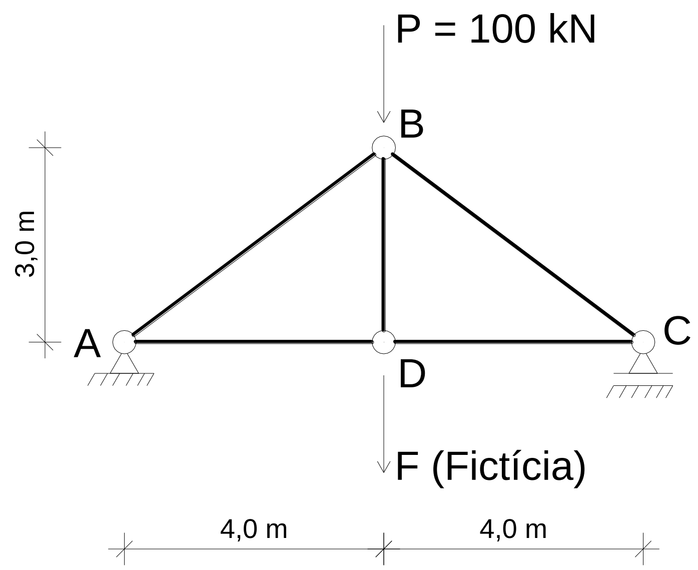
1. EXERCÍCIO DE TRELIÇA

Calcular o deslocamento vertical do ponto D da treliça abaixo. Considerar E = 25 GPa e seção transversal retangular de 5 cm x 5 cm para todas as barras.



1.1 Teorema de Castigliano

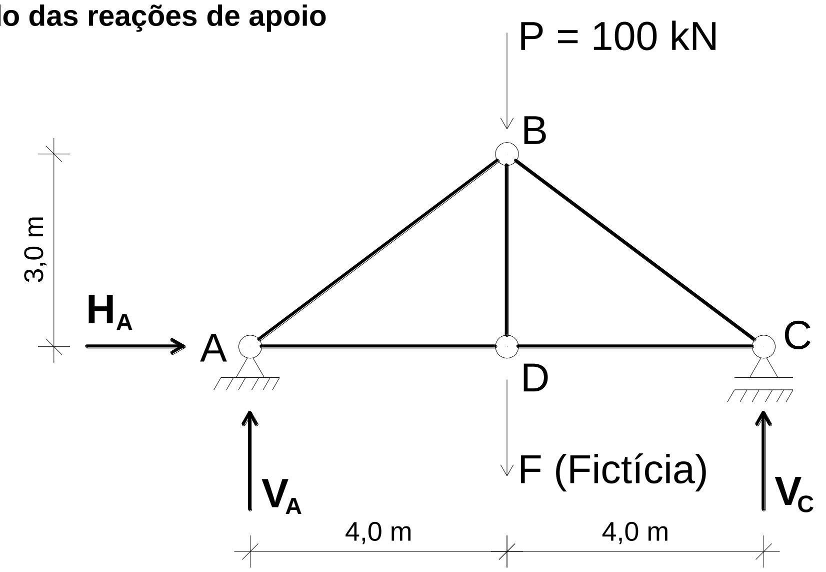
Como estamos querendo calcular o deslocamento vertical do ponto D utilizando o teorema de Castigliano, é necessário que exista uma carga concentrada no ponto D. Como ela não existe, devemos criar uma, que deve ser diferente da existente em B, portanto será chamada de carga F (fictícia). Observa-se que se a carga P estivesse aplicada em D, não seria necessário criar carga fictícia, pois a derivada parcial seria em relação à carga P. Na figura abaixo, tem-se a treliça com a carga F (fictícia).



Como as treliças possuem apenas força normal (N), logicamente não será mais necessária a equação de momento fletor, como no caso das vigas. E o deslocamento será calculado pela expressão a seguir, que mais a frente será montada uma tabela para facilitar o seu cálculo.

$$y_{Dv} = \sum \frac{NL}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial F}$$

1.2 Cálculo das reações de apoio



Inicialmente o cálculo será realizado de forma literal (em função de letras), porém pode ser realizado substituindo-se o valor da carga P, sem problema algum.

$$+\circlearrowleft\ \Sigma M_A = 0 \ \ \therefore$$

$$V_C \cdot 8 - P \cdot 4 - F \cdot 4 = 0$$

$$8V_C - 4P - 4F = 0$$

$$8V_C = 4P + 4F$$

$$V_C = \frac{4P + 4F}{8}$$

$$V_C = \frac{4(P + F)}{8}$$

$$\boldsymbol{V_C = \frac{P + F}{2}}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 \ \ \therefore$$

$$V_A + V_c - P - F = 0$$

$$V_A + \frac{P + F}{2} - P - F = 0$$

$$V_A + \frac{P}{2} + \frac{F}{2} - P - F = 0$$

$$V_A - \frac{P}{2} - \frac{F}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{P}{2} + \frac{F}{2}$$

$$\boldsymbol{V_A = \frac{P + F}{2}}$$

$$+\rightarrow\ \Sigma F_H = 0 \ \ \therefore$$

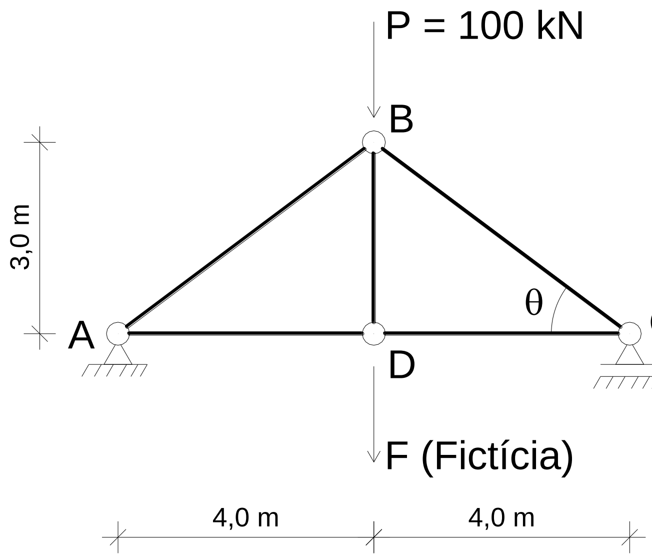
$$\boldsymbol{H_A = 0}$$

1.3 Cálculo dos esforços nas barras pelo método dos nós

Para encontrar o deslocamento no ponto D da treliça em estudo, será necessário calcular os esforços em todas as barras, para isso, será utilizado o método dos nós. A grande dúvida que muitos devem ter, é por qual nó da treliça deve-se iniciar a análise, a resposta é simples, pelo nó que tiver apenas duas barras conectadas a ele. No nosso exemplo, como já possuímos as reações de apoio, a análise poderia ser iniciada pelos nós A ou C, não poderia ser pelos nós B e nem D, pois há três barras conectadas a eles. Portanto, iremos iniciar a análise pelo nó C.

Para as barras inclinadas iremos precisar do seno e cosseno do ângulo com a horizontal, conforme mostra a figura abaixo. E para o cálculo destes, será necessário o comprimento da barra BC (L_{BC}), que será calculada pelo teorema de Pitágoras.

O seno é calculado dividindo-se o cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa, e o cosseno dividindo-se o cateto adjacente pela hipotenusa.



$$L_{BC}{}^2 = L_{DC}{}^2 + L_{BD}{}^2$$

$$L_{BC}{}^2 = 4^2 + 3^2$$

$$L_{BC}{}^2 = 16 + 9$$

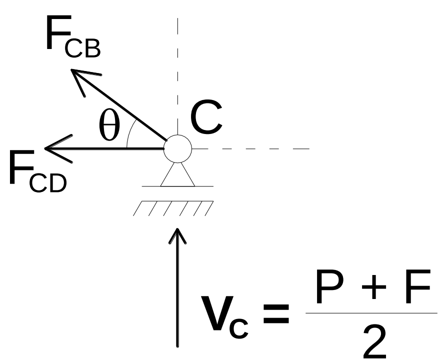
$$L_{BC} = \sqrt{25}$$

$$\boldsymbol{L_{BC} = 5\ m}$$

$$\therefore$$

$$\boxed{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}} \quad \boldsymbol{e} \quad \boxed{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}}$$

NÓ C:



$$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 \ \therefore$$

$$F_{CB} \cdot \operatorname{sen}\theta + V_C = 0$$

$$F_{CB} \cdot \frac{3}{5} + \frac{P+F}{2} = 0$$

$$F_{CB} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{P+F}{2}$$

$$F_{CB} = \frac{-\frac{P+F}{2}}{\frac{3}{5}}$$

$$F_{CB} = -\frac{P+F}{2} \cdot \frac{5}{3}$$

$$\boldsymbol{F_{CB}} = -\frac{\mathbf{5}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F})}{\mathbf{6}}$$

$$+\rightarrow\ \Sigma F_H = 0 \ \therefore$$

$$-F_{CD} - F_{CB} \cdot \cos\theta = 0$$

$$-F_{CD} = F_{CB} \cdot \cos\theta$$

$$F_{CD} = -F_{CB} \cdot \cos\theta$$

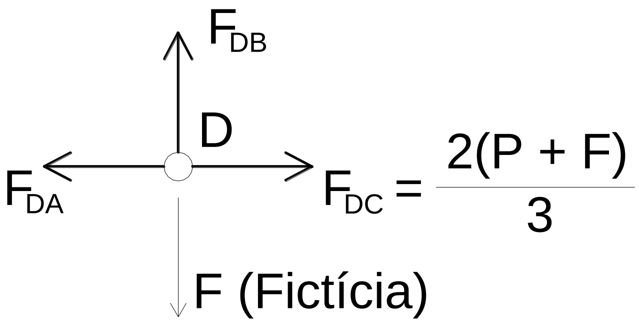
$$F_{CD} = -\left(-\frac{5(P+F)}{6}\right) \cdot \frac{4}{5}$$

$$F_{CD} = \frac{5(P+F)}{6} \cdot \frac{4}{5}$$

$$F_{CD} = \frac{4(P+F)}{6}$$

$$\boldsymbol{F_{CD}} = \frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F})}{\mathbf{3}}$$

NÓ D:



$$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 \ \therefore$$

$$F_{DB} - F = 0$$

$$\boldsymbol{F_{DB} = F}$$

$$+\rightarrow\ \Sigma F_H = 0 \ \therefore$$

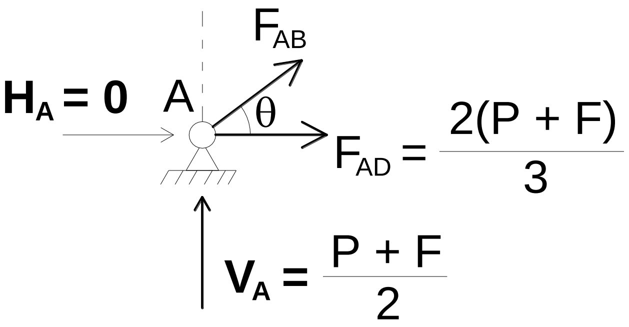
$$-F_{DA} + F_{DC} = 0$$

$$-F_{DA} = -F_{DC}$$

$$F_{DA} = F_{DC}$$

$$\boldsymbol{F_{DA} = \frac{2(P+F)}{3}}$$

NÓ A:



$$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 \ \therefore$$

$$F_{AB} \cdot \operatorname{sen}\theta + V_A = 0$$

$$F_{AB} \cdot \frac{3}{5} + \frac{P+F}{2} = 0$$

$$F_{AB} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{P+F}{2}$$

$$F_{AB} = \frac{-\frac{P+F}{2}}{\frac{3}{5}}$$

$$F_{AB} = -\frac{P+F}{2} \cdot \frac{5}{3}$$

$$\boldsymbol{F_{AB} = -\frac{5(P+F)}{6}}$$

1.4 Cálculo do deslocamento vertical no ponto D

Para o cálculo do deslocamento no ponto D, será montada uma tabela para facilitar a análise utilizando a expressão mostrada no item 1.1.

A tabela é composta por seis colunas, listadas a seguir:

1. Nome das barras, exemplo: barras AB, AC etc...
2. Força normal referente à barra, calculada no método dos nós.
3. Comprimento da barra.
4. Rigidez axial da barra.
5. Derivada parcial da força normal (coluna 2) em relação à carga concentrada aplicada no ponto que está sendo pedido o deslocamento.
6. Expressão mostrada no item 1.1 (coluna 2 x coluna 3 x coluna 5 / coluna 4).

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
BARRAS	**N (kN)**	**L (m)**	**EA**	$\frac{\partial N}{\partial F}$	$\frac{NL}{EA}\cdot\frac{\partial N}{\partial F}$
AB	$-\frac{5(P+F)}{6}$	5	EA	$-\frac{5}{6}$	$\frac{125(P+F)}{36\ EA}$
BC	$-\frac{5(P+F)}{6}$	5	EA	$-\frac{5}{6}$	$\frac{125(P+F)}{36\ EA}$
CD	$\frac{2(P+F)}{3}$	4	EA	$\frac{2}{3}$	$\frac{16(P+F)}{9\ EA}$
DA	$\frac{2(P+F)}{3}$	4	EA	$\frac{2}{3}$	$\frac{16(P+F)}{9\ EA}$
DB	F	3	EA	1	$\frac{3F}{EA}$

$$y_{Dv} = \sum \frac{NL}{EA}\cdot\frac{\partial N}{\partial F}$$

$$y_{Dv} = \frac{125(P+F)}{36\,EA} + \frac{125(P+F)}{36\,EA} + \frac{16(P+F)}{9\,EA} + \frac{16(P+F)}{9\,EA} + \frac{3F}{EA}$$

Como a carga F é fictícia, F = 0 $\therefore$

$$y_{Dv} = \frac{125(P+0)}{36\,EA} + \frac{125(P+0)}{36\,EA} + \frac{16(P+0)}{9\,EA} + \frac{16(P+0)}{9\,EA} + \frac{3\cdot 0}{EA}$$

$$y_{Dv} = \frac{125\,P}{36\,EA} + \frac{125\,P}{36\,EA} + \frac{16\,P}{9\,EA} + \frac{16\,P}{9\,EA}$$

$$y_{Dv} = \frac{125\,P + 125\,P + 64\,P + 64\,P}{36\,EA}$$

$$\boldsymbol{y_{Dv} = \frac{378\,P}{36\,EA}}$$

Valor numérico:

$$y_{Dv} = \frac{378\,P}{36\,EA}$$

$$y_{Dv} = \frac{378\,m\cdot 100\,kN}{36\cdot 25\,GPa\ \cdot (0{,}05\,m\cdot 0{,}05\,m)}$$

$$y_{Dv} = \frac{378\,m\cdot 100\,kN}{36\cdot 2{,}5\cdot 10^{7}\,kN/m^2\ \cdot (2{,}5\cdot 10^{-3}\,m^2)}$$

$$y_{Dv} = 0{,}0168\,m \qquad ou$$

$$\boldsymbol{y_{Dv} = 1{,}68\,cm}$$